

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **A. AM-ROUNE** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **L.ZEDAM**, Professeur à université de M'sila pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

*Je remercie vivement Monsieur **L. LEDJLAT**, Professeur à université de M'sila.*

*Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, surtout mes professeurs **A. TALLAB** et **A. MERZOUGUI**.*

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes frères pour leur soutien tout au long de mes études.

Résumé

Ce travail porte sur la notion d'algèbre de Boole. On a commencé notre travail par l'introduction des treillis distributifs, treillis complémenté et treillis de Boole. En fin, après quelques généralités sur les espaces topologiques, on a terminé ce travail par une représentation topologique des algèbres de Boole.

Abstract

This work focuses on the concept of Boolean algebra. We started our work by the introduction of distributive lattices, complemented lattices and Boolean lattice. In the end, after giving some generalities about general topological spaces, we completed this work by a topological representation of Boolean algebras.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralité sur les algèbres de Boole	2
1.1 Treillis	2
1.1.1 Treillis distributif	8
1.1.2 Treillis complémenté	9
1.1.3 Treillis de Boole	10
1.2 Algèbre de Boole	10
1.2.1 Propriétés des algèbres de Boole	11
1.3 Sous anneau Booléen	14
1.4 Atomes dans une algèbre de Boole	14
1.5 Homomorphisme	14
2 Idéaux et filtres	16
2.1 Idéal	16
2.1.1 Propriété	16
2.1.2 Idéaux maximaux	17
2.2 Filtre	17
2.2.1 Propriétés	17
2.2.2 Filtre engendré	18
2.2.3 Filtre principal	20
2.2.4 Ultrafiltre	20
2.3 Théorème de représentation de stone	25

2.3.1	Conséquences	27
3	Etude Topologique	28
3.1	Etude Topologique	28
3.2	Espace dual d'un anneau Booléen	29
3.2.1	Complément	30
3.3	Anneau Booléen dual d'un espace Booléen	31
	Conclusion générale	33
	Bibliographie	35

Introduction

Dans ce travail, nous avons essayé de donner un aperçu sur les différentes propriétés des algèbres de Boole.

On a commencé notre travail par l'introduction des treillis distributifs, treillis complémenté et treillis de Boole. En fin une étude détaillée sur les algèbres de Boole. Et après quelques généralités sur les espaces topologiques on a terminé ce travail par une représentation topologique des algèbres de Boole.

Ce mémoire est composé de trois chapitres

Dans le premier chapitre, on a donné quelques définitions concernant les treillis, treillis distributive, treillis complémenté, treillis de Boole et algèbres de Boole.

Dans le deuxième chapitre, on a introduit la notion de filtre et ultrafiltre ainsi que la notion d'idéal et idéal maximal, et ces notions nous a permet de donner le théorème de représentation de Stone pour les algèbres de Boole.

En on a terminé ce travail par une étude topologique des algèbres de Boole.

Chapitre 1

Généralité sur les algèbres de Boole

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions concernant les treillis, treillis distributive, treillis complémenté, treillis de Boole et algèbre de Boole.

1.1 Treillis

On peut donner deux définitions équivalentes aux treillis :

Définition 1.1.1 *Un treillis est un ensemble ordonné (T, \leq) dans le quel tout pair d'éléments (x, y) admet une borne supérieure et une borne inférieure : $\forall x, y \in T$ $\sup\{x, y\}$ et $\inf\{x, y\}$ existent.*

Rappelons que \sup est le plus petit des majorants, \inf est le plus grand des minorants.

Exemple 1.1.1

1. *L'ensemble E des diviseurs d'un entier N muni de la relation "divise" est un treillis*

$$\inf\{x, y\} = PGCD(x, y)$$

$$\sup\{x, y\} = PPCM(x, y)$$

$\left[\inf\{x, y\} \text{ et } \sup\{x, y\} \text{ existent toujours car } 1 \text{ divise tous les éléments de } E, \text{ et tous les éléments} \right.$

2. L'ensemble $P(E)$ des parties d'un ensemble E , muni de l'inclusion, est un treillis :

$$\begin{aligned}\inf\{x, y\} &= X \cap Y \\ \sup\{x, y\} &= X \cup Y\end{aligned}$$

L'ensemble vide est contenu dans tous les éléments de $P(E)$, et ils sont tous contenus dans E .

3. Un ensemble totalement ordonné est un treillis :

$$\begin{aligned}\text{Si } x = y \text{ alors } \inf &= \sup = x = y \\ \text{Si } x \leq y \text{ alors } \inf &= x, \sup = y \\ \text{Si } y \leq x \text{ alors } \inf &= y, \sup = x\end{aligned}$$

Autre définition :

Un treillis est un ensemble T muni de deux lois de composition interne \vee et \wedge vérifiant les quatre axiomes suivants :

1. *Commutativité* : $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$.
2. *Associativité* : $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ et $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.
3. *Idempotence* : $x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$.
4. *Lois d'absorption* : $x \vee (x \wedge y) = x$ et $x \wedge (x \vee y) = x$.

Preuve. Démontrons que ces deux définitions sont équivalentes.

Définition 1 \implies définition 2 :

On connaît une relation d'ordre \leq sur T , on doit définir deux lois \vee et \wedge . Pour tout pair d'éléments (x, y) de T , on pose :

$$\begin{aligned}x \vee y &= \sup\{x, y\} \\ x \wedge y &= \inf\{x, y\}\end{aligned}$$

1. La commutativité se déduit de $\{x, y\} = \{y, x\}$.

2. Associativité : soit $t = x \vee (y \vee z)$.

t majore x (c'est-à-dire $x \leq t$)

t majore $y \vee z$, donc majore y et z .

t est donc un majorant commun à x, y et z .

Soit w un autre majorant commun à x, y et z : w majore y et z , donc $y \vee z \leq w$

w majore x , donc : $\sup\{x, y \vee z\} = x \vee (y \vee z) = t \leq w$

t est donc le plus petit des majorants de $\{x, y, z\}$.

On démontre de la même façon que $(x \vee y) \vee z$ est le plus petit des majorants de $\{x, y, z\}$, il est donc égal à t .

La démonstration est identique pour \wedge (cette fois, il s'agit de minorants).

3. Idempotence : $\sup\{x\} = \inf\{x\} = x \implies x \vee x = x \wedge x = x$.

4. Absorption :

On se sert du fait que

$$x \leq y \implies x \wedge y = x \text{ et } x \vee y = y$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

$$\implies x \wedge y \text{ est le plus grand des minorants de } \{x, y\}$$

$$\implies x \wedge y \leq x$$

$$\text{donc } x \vee (x \wedge y) = x.$$

$$\text{De même : } x \leq x \vee y \implies x \wedge (x \vee y) = x$$

Définition2 \implies définition1

On connaît deux lois \vee et \wedge , on doit définir une relation d'ordre \leq sur T .

On pose :

$$\forall x, y \in T, \quad x \leq y \iff x \wedge y = x$$

On a bien défini une relation d'ordre :

1. Réflexivité : $x \wedge x = x$ (idempotence) $\implies x \leq x$,

2. Antisymétrie :

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y \iff x \wedge y = x \\ y \leq x \iff y \wedge x = y \\ x \wedge y = y \wedge x \end{array} \right\} \implies x = y.$$

3. Transitivité

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff x \wedge y = x \\ y \leq z &\iff y \wedge z = y \\ x \wedge z &= (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x \implies x \leq z \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff x \vee y = y \\ x \leq y &\iff x \wedge y = x \iff x \vee y = (x \wedge y) \vee y \\ &\iff x \vee y = y \vee (x \wedge y) \text{ (commutativité)} \\ &\iff x \vee y = y \text{ (absorption)} \end{aligned}$$

$x \vee y$ est bien égal à $\sup\{x, y\}$:

$$\begin{aligned} \text{soit } z &= \sup\{x, y\} : x \leq z \\ & y \leq z \\ \forall t & \text{ tel que } x \leq t \text{ et } y \leq t : z \leq t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \leq z &\implies x \vee z = z \\ y \leq z &\implies y \vee z = z \\ z &= x \vee z = x \vee (y \vee z) \quad (\text{associativité}) \\ &= ((x \vee y) \vee z) \implies x \vee y \leq z \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = (\text{absorption}) x \implies x \leq x \vee y \\ y \wedge (x \vee y) = (\text{commutativité}) y \wedge (y \vee x) \\ = (\text{absorption}) y \implies y \leq x \vee y \end{array} \right\} \implies z \leq x \vee y$$

donc : $z = x \vee y = \sup\{x, y\}$

On démontre de la même façon que $x \wedge y$ est bien égal à $\inf\{x, y\}$.

■

D'après ce qui on peut donner le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 Soit T un ensemble muni de deux lois internes \wedge et \vee et qui sont idempotentes, commutatives associatives et qui vérifient les lois d'absorption, alors il existe une relation d'ordre unique \leq sur T tel que T un treillis avec :

$$\begin{cases} x \vee y = \sup \{x, y\} \\ x \wedge y = \inf \{x, y\} \end{cases}$$

Preuve. Si une telle relation d'ordre existe elle est nécessairement

$$\begin{aligned} xRy &\iff x = x \wedge y \\ \text{OU} \\ xR'y &\iff y = x \vee y \end{aligned}$$

i). $R = R'$ (Unicité)

$$\begin{aligned} xRy &\implies xR'y \\ x \vee y &= (x \wedge y) \vee y \\ &= y \implies xR'y, \\ \text{de même,} \\ xR'y &\implies xRy \\ xR'y &\implies y = x \vee y \\ &\implies x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x \\ &\implies xRy \end{aligned}$$

Donc, $R = R'$ (i.e. : R est unique).

ii). Montrons maintenant que R est une relation d'ordre c'est à dire R est :

1. *Réflexive* :

$$\begin{aligned} xRx &\iff x = x \wedge x \\ &\iff x = x \vee x \text{ (idempotence).} \end{aligned}$$

2. *Antisymétrique* :

$$\begin{aligned} \begin{cases} xRy \\ \text{et} \\ yRx \end{cases} &\implies \begin{cases} x = x \wedge y \\ \text{et} \\ y = y \wedge x \end{cases} \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

3. *Transitive* :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} &\implies \begin{cases} x = x \wedge y \\ y = y \wedge z \end{cases} \\
 &\implies x \wedge y &= x \wedge y \wedge y \wedge z \\
 & &= x \wedge z \\
 & &= x \\
 &\implies xRz &\text{d'où la transitivité.}
 \end{aligned}$$

Donc il existe une relation d'ordre unique, tel que

$$\begin{cases} x \vee y = \sup \{x, y\} \\ x \wedge y = \inf \{x, y\} \end{cases}$$

■

Définition 1.1.2 *Un treillis est fermé s'il possède un plus petit élément noté (0) et un plus grand élément noté (1).*

Exemple 1.1.2

1. Le treillis $D(30) = \{L'ensemble \text{ de diviseur de } 30\}$ est fermé (0) = 1 et (1) = 30
2. $(P(E), \subset)$ est fermé (0) = \emptyset et (1) = E .

Propriété

Dans un treillis :

1. Si $a \leq b \implies \begin{cases} a \wedge x \leq b \wedge x \\ a \vee x \leq b \vee x \end{cases}, x \in T$
2. Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies \begin{cases} a \wedge c \leq b \wedge d \\ a \vee c \leq b \vee d \end{cases}$

1.1.1 Treillis distributif

Définition 1.1.3 *Un treillis T est distributif si :*

$$\forall x, y \in T : \begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) & (1) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) & (2) \end{cases}$$

C'est -à-dire qu'un treillis est distributif si et seulement si on a la distributivité de l'opération \wedge par rapport à l'opération \vee et la distributivité de l'opération \vee par rapport à l'opération \wedge .

Remarque 1.1.1 *La condition (2) est inutile.*

En effet supposons T distributif :

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2

$$= x \vee (y \wedge z) \text{ (lois d'absorption)}$$

La réciproque s'établit de façon analogue en montrant que : $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$.

Exemple 1.1.3

1. *Le treillis S formé par l'ensemble de tous les sous ensemble d'un ensemble ordonné T par la relation d'inclusion est un treillis distributif.*
2. *Toute chaîne est un treillis distributif $\text{Min}(x, \text{Max}(y, z)) = \text{Max}(\text{Min}(x, y), \text{Min}(x, z))$.*

Théorème 1.1.2 *Dans un treillis distributif si :*

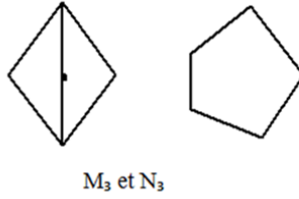
$$\left. \begin{aligned} x \wedge z &= y \wedge z \\ x \vee z &= y \vee z \end{aligned} \right\} \implies x = y$$

Preuve. $((T, \leq) \text{ treillis distributif}) \iff ((x \wedge z = y \wedge z \text{ et } x \vee z = y \vee z) \implies (x = y))?$

$$\begin{aligned}
x &= x \vee (x \wedge z) \\
&= x \vee (y \wedge z) \\
&= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \quad \blacksquare \\
&= (x \wedge z) \vee y \\
&= (y \wedge z) \vee y \\
&= y
\end{aligned}$$

Caractérisation des treillis distributifs

Un treillis T est distributif si et seulement s'il ne contient aucun sous treillis isomorphe à M_3 ou N_5 .



1.1.2 Treillis complémenté

Définition 1.1.4 C'est un treillis fermé T tel que pour chaque $x \in T$ il existe au moins

$$x' \in T : \begin{cases} x \wedge x' = 0 \\ x \vee x' = 1 \end{cases}$$

x' est dit complément de x .

Exemple 1.1.4

1. $(P(E), \subset)$ est complémenté.
2. $D(30)$ est aussi complémenté.

Théorème 1.1.3 Dans un treillis distributif complémenté il y a unicité de complémenté.

Preuve. On montre alors que chaque élément x de B a un seul complémentaire, si x' , x'' sont des complémentaire de x , on a $x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'')$; comme $x \vee x'' = 1$, le premier membre est x' ; comme $(x' \wedge x) = 0$, on aura

x', x'' sont des complémentaires de x , on a $x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'')$; comme $x \vee x'' = 1$, le premier membre est x' ; comme $(x' \wedge x) = 0$, on aura

d'autre part

$$\Longleftrightarrow x < x''$$

le second d'où $x' \leq x''$; de même $x'' \leq x'$, d'où $x' = x''$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \wedge x' = x \wedge x'' \\ x \vee x' = x \vee x'' \end{array} \right. \iff x' = x''. \blacksquare$$

Définition 1.1.5 *Un treillis distributif fermé et complété est un treillis de Boole.*

1. $P(E)$ est un treillis de Boole.
2. La chaîne $U = \{0, 1\}$ est un treillis de Boole.
3. $(\mathbb{N}^*, /)$ n'est pas un treillis de Boole.
4. $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis de Boole.

Définition 1.2.1 " " " " " " " " " " Une algèbre de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.

Autre définition:

Une algèbre de Boole $\{0, 1\}$ possédant deux opérations \vee et \wedge qui sont commutatives, associatives, idempotentes et vérifiant les lois d'absorption, forme un treillis.

Ces opérations étant distributives et chaque élément possédant un complément, il en résulte que toute algèbre de Boole est un treillis de Boole.

La relation d'ordre sur l'ensemble qui sera notée \leq est définie par :

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

Propriété

1. $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.
2. $\neg \neg x = x$.
3. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ et $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (lois de De Morgan).

Définition 1.2.2 Soient $x, y \in T$, on définit la somme $x + y$ par :

$$x + y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

et par :

$$x + y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$$

$$\neg(x + y) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$$

$$\neg(x + y) = (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y).$$

1.2.1 Propriétés des algèbres de Boole**1. Involution :**

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Le complément du complément de x est x .

2. Formules de De Morgan :

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Théorème 1.2.1 *Tout treillis de Boole est un anneau commutatif et unitaire pour les lois*
 $x + y = (x \wedge \top y) \vee (\top x \wedge y)$ *et* $x * y = x \wedge y$.

Définition 1.2.3 *Un anneau Booléen est un anneau unitaire dont la multiplication est idempotente ($x^2 = x$).*

Remarque 1.2.1 *Dans un anneau Booléen on a :*

1. $x + x = 0$.

$$\begin{aligned} (x + x)^2 &= x + x \\ &= (x + x)(x + x) \\ &= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 \\ &= x + x + x + x. \end{aligned}$$

alors : $x + x = x + x + x + x \implies x + x = 0$

2. Un anneau Booléen est commutatif :

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x + y \text{ et } (x + y)^2 = (x + y)(x + y) \\ &= x^2 + x * y + y * x + y^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x + y &= x + x * y + y * x + y \\ &= x + y + x * y + y * x \implies x * y = y * x. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 *Tout anneau Booléen est un treillis de Boole pour les lois :*

1. $x \wedge y = x * y$.

2. $\top x = x + 1$.

3. $x \vee y = x + y + x * y$.

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff x \wedge y = x \\ &\iff x * y = x \\ &\iff x \vee y = y \\ &\iff \top x \vee y = 1 \\ &\iff x \wedge \top y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lceil x \vee y &= \lceil x + y + \lceil x * y \\
 &= x + 1 + y + (x + 1) * y \\
 &= x + 1 + y + x * y + y \\
 &= x + 1 + x * y \\
 &= 1
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \iff x + x * y &= 0 \\
 \iff x * (1 + y) &= x \wedge \lceil y \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$4. \quad x \leq y \iff \lceil y \leq \lceil x \quad \text{car :} \quad \lceil y \vee \lceil x = \lceil (x \wedge y) = \lceil x$$

Lois supplémentaires

$$\begin{aligned}
 x \longrightarrow y &= \lceil x \vee y \implies x \leq y \iff x \longrightarrow y = 1 \\
 x \longleftrightarrow y &= (x \longrightarrow y) \wedge (y \longrightarrow x) = (\lceil x \vee y) \wedge (\lceil y \vee x) = \lceil (x + y)
 \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2 Si on considère uniquement un anneau Booléen unitaire à partir de $+$, $*$, 1 on peut définir les autres :

1. $x \wedge y = x * y.$
2. $x \vee y = x + y + x * y.$
3. $0 = 1 + 1.$
4. $\lceil x = x + 1.$

De même à partir de $\lceil, *$ on peut tout définir

1. $x \vee y = \lceil (\lceil x * \lceil y).$
2. $x + y = \lceil (\lceil (x * \lceil y) * \lceil (x * y)).$
3. $x \longrightarrow y = \lceil (x * \lceil y).$
4. $x \longleftrightarrow y = \lceil (x * \lceil y) * \lceil (x * y).$

On peut fabriquer une unique loi qui engendre toutes les 6 lois.

$$\text{Loi de Scheffer : } x \setminus y = \neg x * \neg y.$$

$$\text{Loi de Pierce : } x \downarrow y = \neg x \vee \neg y.$$

Par exemple la loi de Scheffer : $\neg x = x \setminus x$

- $x * y = \neg x \setminus \neg y = (x \setminus x) \setminus (y \setminus y)$
- $x \vee y = \neg(\neg x * \neg y) = (x \setminus y) \setminus (x \setminus y)$
- $x \longrightarrow y = \neg(x * \neg y) = [(x \setminus x) \setminus y] \setminus [(x \setminus x) \setminus y]$

1.3 Sous anneau Booléen

1. Le sous anneau Booléen B' est tout sous anneau unitaire de B tel que :

$$x \in B', y \in B' \implies x * y \in B' \text{ et } x + y \in B'$$

2. B' est un sous anneau Booléen si et seulement si B est une partie non vide tel que :

$$x \in B' \text{ et } y \in B' \implies \neg x \in B' \text{ et } x * y \in B'.$$

1.4 Atomes dans une algèbre de Boole

Définition 1.4.1 Un élément a d'une algèbre de Boole B est un atome si et seulement si pour tout $x \in B$ et pour $a \neq 0$, on a $x \wedge a = a$ ou $x \wedge a = 0$. Ce qui revient à dire que pour tout x le pgm de x et a ou 0 .

Autre dit a est un atome s'il couvrir le 0 .

1.5 Homomorphisme

Définition 1.5.1 Soient B et B' deux algèbres Booléennes et $f : B \longrightarrow B'$, f est un morphisme Booléen si f est un morphisme d'anneau unitaire i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(x.y) = f(x).f(y) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} f(\neg x) = \neg f(x) \\ f(x.y) = f(x).f(y) \end{array} \right.$$

Remarque 1.5.1 *Si f est un morphisme Booléen*

1. f conserve toutes les opérations Booléennes.
2. f est un application croissant

En effet :

$$\begin{aligned}
 x \leq y &\implies x.y = x \\
 &\implies f(x.y) = f(x) = f(x).f(y) \\
 &\implies f(x) \leq f(y)
 \end{aligned}$$

$$f : B \longrightarrow B' \text{ homomorphisme Booléen } \begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 f(x \vee y) &= f(\lceil \lfloor x \rfloor y \rceil) \\
 &= \lceil f(\lfloor x \rfloor).f(\lfloor y \rfloor) \rceil \\
 &= \lceil f(\lfloor x \rfloor) \vee \lceil f(\lfloor y \rfloor) \rceil \\
 &= f(x) \vee f(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f(\lceil \lfloor 0 \rfloor \rceil) \\
 &= \lceil f(\lfloor 0 \rfloor) \rceil \\
 &= \lceil f(1) \rceil \\
 &= \lceil 1 \rceil \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Idéaux et filtres

Dans ce chapitre, nous introduisons les définitions d'idéal, idéal maximal, filtre et ultrafiltre. Enfin nous donnons le théorème de représentation de Stone.

2.1 Idéal

Définition 2.1.1 Soit T un treillis fermé. On appelle idéal de T (noté I) toute partie non vide de T tel que :

1. $x \in I, y \leq x \implies y \in I$.
2. $x, y \in I : x \vee y \in I$.

2.1.1 Propriété

- Idéal propre $\implies I \neq T$
 $\iff 1 \notin I$
- $\{0\}$ est le plus petit idéal de T .
- Idéal engendré par une partie G , noté : I_G , $I_G = \{x \in T \mid x \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n, a_i \in G\}$,
- Si $G = \emptyset$, $I_G = \{0\}$.
- G est une partie \vee -compatible si $I_G \neq T$.
- G est une partie \vee -incompatible $\iff \exists (a_i)_{i \in 1..n}, a_i \in G \setminus a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$.

2.1.2 Idéaux maximaux

Proposition 2.1.1 *L'ensemble des idéaux propres est inductif, il admet donc un élément maximal.*

Théorème 2.1.1 *Dans un anneau Booléen idéal treillis \equiv idéal anneau.*

Preuve. Soit I un idéal au sens treillis,

$$x, y \in I : \quad x + y = (x \cdot]y) \vee (]x \cdot y) \in I$$

$$x \cdot]y = z_1 < x \in I$$

$$]x \cdot y = z_2 < y \in I$$

$$x \in I, y \in B \implies x \cdot y \leq x \in I \implies x \cdot y \in I$$

donc I est un idéal au sens anneau. On considère J un idéal au sens anneau;

J est un idéal au sens treillis?

$$x \in J, \quad y \in B; \quad y \leq x \implies y \in J ?$$

$$x \cdot y = y \in J \quad .$$

$$x, y \in J \implies x \vee y = x + y + x \cdot y \in J$$

donc : J est un idéal au sens treillis. ■

Notation 2.1.1 $G \subset B, \quad]G = \{]x \mid x \in G \} \quad .$

2.2 Filtre

Définition 2.2.1 *On appelle filtre dans un treillis toute partie $F \neq \emptyset$ vérifiant :*

1. $x \in F, x \leq y \implies y \in F.$
2. $x \in F \text{ et } y \in F \implies x \wedge y \in F.$

2.2.1 Propriétés

- Soit 1 le plus grand élément de T , l'ensemble $\{1\}$ est un filtre de T , c'est le plus petit filtre de T .

$$\begin{aligned} F \text{ filtre propre} &\iff 0 \notin F \text{ (Car : si } 0 \in F, \forall x \in T, x \geq 0 \implies x \in F, \text{ donc } F = T) \\ &\iff F \neq T. \end{aligned}$$

$$F \text{ filtre impropre} \iff T = F$$

- Tout intersection des filtres propres est un filtre $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.

$$\textbf{Preuve.} \quad x \in F \implies x \in \bigcap_{i \in I} F_i \implies x \in F_i, \forall i \in I$$

$$x \leq y \implies y \in F_i, \forall i \implies y \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$$

$$\text{Si } x \in F \text{ et } y \in F \implies \begin{cases} x \in F_i \quad \forall i \\ y \in F_i \quad \forall i \end{cases}$$

$$\implies x \wedge y \in F_i, \forall i$$

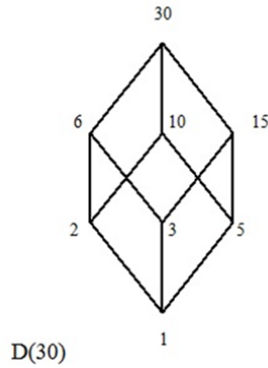
$$\implies x \wedge y \in \bigcap_{i \in I} F_i = F.$$

Donc : l'intersection des filtres propres est un filtre. ■

Exemple 2.2.1 $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$F_1 = \{2, 6, 10, 30\}$ est un filtre et $F_2 = \{2, 10, 30\}$ n'est pas un filtre car :

$2 \leq 6$ et $6 \notin F_2$.



2.2.2 Filtre engendré

Définition 2.2.2 Un filtre engendré par $G \neq \emptyset$, noté F_G tel que :

$$F_G = \bigcap \{ \text{Filtre} \supset G \}$$

= Le plus petit filtre qui contient G .

Exemple 2.2.2 Soit $F_1 = \{2, 6, 10, 30\}$ et $F_2 = \{5, 10, 15, 30\}$ deux filtres,

$F_G = \{10, 30\}$ et un filtre engendré par $G = \{10\}$.

Propriété

- Si $G = \emptyset \implies F_G = \{1\}$
- Si $G = \emptyset \implies F_G$ est l'ensemble des $x \in F$ tel qu'il existe un nombre fini a_1, a_2, \dots, a_n d'éléments de G , $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$,
 $F' = \{x \in T \mid x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n, a_i \in G\}$.

Preuve.

$$1. \quad F' \neq \emptyset, \text{ car } G \neq \emptyset \implies \exists x \in G, \text{ mais } x \geq x \implies x \in F' \implies F' \neq \emptyset$$

$$2. \quad x \in F' \text{ et } y \in F' \implies x \wedge y \in F'?$$

$$x \in F' \implies x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n, \quad a_i \in G$$

$$y \in F' \implies y \geq b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n, \quad b_i \in G$$

$$x \wedge y \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n$$

$$\text{Donc : } x \wedge y \in F'$$

$$3. \quad x \in F', \quad y \geq x \implies x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \text{ et } y \geq x \text{ alors : } y \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$$

$$\text{Donc : } y \in F'$$

alors F' est un filtre.

$$G \subset F'?$$

$$x \in G, \quad x \geq x \implies x \in F', \quad G \subset F', \text{ conclusion : } F' \text{ est un filtre qui contient } G.$$

Soit F un filtre qui contient G , montrons que $F' \subset F$: $x \in F' \implies x \in F$?

Si $x \in F' \implies x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n, a_i \in G$, mais : $G \subset F$ et soit

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = a \in F \implies x \in F, \text{ alors : } F' \subset F.$$

Donc : F' est un filtre engendré. ■

$$\textbf{Exemple 2.2.3} \quad G = \{6\}, \quad F_G = \{6, 30\}$$

$$G = \{2\}, \quad F_G = \{2, 6, 10, 30\}$$

$$G = \{3, 5\}, \quad F_G = T$$

2.2.3 Filtre principal

Définition 2.2.3 $F_{\{a\}} = F_a$ c'est un filtre engendré par un singleton

$$F_a = \{x \in T \mid x \geq a\} = T \vee a.$$

Définition 2.2.4 G est une partie \wedge -compatible si F_G est propre i.e. : $F_G \neq T$. Si G est \wedge -incompatible, il existe un nombre fini a_1, a_2, \dots, a_n d'éléments de G , $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$ i.e. : $F_G = T$.

Théorème 2.2.1 L'ensemble des filtres propres ordonné par inclusion est inductif. (Inductif : Toute chaîne admet un élément maximal.).

Preuve. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une chaîne des filtres propres, on pose : $F = \bigcup_{i \in I} F_i$,

$$\text{soit } x \in F, y \geq x \implies \exists i_0 \setminus x \in F_{i_0} \implies y \in F_{i_0} \implies y \in \bigcup F_i,$$

$$\text{soit } x \in F, y \in F : \begin{cases} x \in F \implies \exists i \setminus x \in F_i \\ y \in F \implies \exists j \setminus y \in F_j \end{cases} \quad F_i \text{ et } F_j \text{ sont comparables pour}$$

$F_i \subset F_j, x \in F_j, y \in F_j \implies x \wedge y \in F_j \implies x \wedge y \in F = \bigcup F_i \implies F$ est un filtre. D'après le lemme de **zorne**, il existe des filtres propres maximaux pour l'inclusion ce sont ultrafiltre. Tout filtre propre est inclus dans ultrafiltre. ■

2.2.4 Ultrafiltre

Définition 2.2.5 Un ultrafiltre est un filtre propre maximal au sens de l'inclusion entre les filtres.

Exemple 2.2.4 $F = \{2, 6, 10, 30\}$ Ultrafiltre car : 2 est un atome de filtre T donc F est un ultrafiltre. En effet si $F \subset F'$, si on ajouté un élément soit 3 $\implies 3 \wedge 2 = 1$ n'est pas un filtre propre, donc il n'existe pas un autre filtre contient F (Même raisonnement pour le reste des éléments i.e. 1, 5, 15).

Caractérisation d'un ultrafiltre dans un treillis

Proposition 2.2.1 Soit F un Filtre propre les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a. F est un ultrafiltre.

b. $\forall x \notin F, \exists y \in F \setminus x \wedge y = 0$.

Preuve. ($a \implies b$)

F Ultrafiltre (propre). Supposons qu'il existe $x \in F \setminus \forall y \in F : x \wedge y \neq 0$.

On considère $G = F \cup \{x\}$ montrons que G est \wedge -compatible a_1, a_2, \dots, a_n de G

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \longrightarrow \begin{cases} \neq 0 \text{ si } a_i \in F \\ a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \wedge x = y \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

Donc G est une partie \wedge -compatible

$\implies F_G$ est propre et contient F ce qui contre dit la maximalité de F .

($b \implies a$)

Si on a (b) i.e. : $\forall x \notin F, \exists y \in F \setminus x \wedge y = 0$. Supposons qu'il existe un filtre propre F' tel que $F \subsetneq F'$ alors il existe $x \in F'$ et $x \notin F$.

$x \notin F$ (d'après b), $\exists y \in F \setminus x \wedge y = 0$, $y \in F'$, $x \in F'$, mais $x \wedge y = 0$ ce qui contre dit que F' est un filtre propre. Donc il n'existe aucun filtre propre F' qui contient F par conséquent F est maximal. ■

Proposition 2.2.2 Soit B un l'algèbre de Boole, I est un idéal dans B si et seulement si $\lceil I$ est un filtre dans B .

Preuve. I idéal $\implies \lceil I$ est un filtre?

$$x \in \lceil I, y \geq x \implies y \in \lceil I ?$$

$$\lceil x \in I, \lceil y \leq \lceil x \implies \lceil y \in I$$

$$\implies y \in \lceil I \dots \dots (*)$$

$$\begin{cases} x \in \lceil I \\ y \in \lceil I \end{cases} \implies x \wedge y \in \lceil I ?$$

$$\lceil x \in I, \lceil y \in I \implies \lceil x \vee \lceil y \in I$$

$$\implies \lceil (\lceil x \vee \lceil y) \in \lceil I$$

$$\implies x \wedge y \in \lceil I \dots \dots (**)$$

de (*) et (**) $\lceil I$ est un filtre.

$$\lceil I \text{ est un filtre} \implies I \text{ est un idéal?}$$

$$\begin{aligned}
x \in I, y \leq x &\implies y \in I ? \\
x \in I &\implies \bigwedge x \in I, y \leq x \\
&\implies \bigwedge x \leq y \\
&\implies \bigwedge y \in I \\
&\implies y \in I \quad \dots\dots(*) \\
x \in I, y \in I &\implies x \vee y \in I ? \\
\bigwedge x \in I \text{ et } \bigwedge y \in I &\implies \bigwedge x \wedge y \in I \\
&\implies \bigwedge (\bigwedge x \wedge y) \in I \\
&\implies x \vee y \in I \dots\dots(**)
\end{aligned}$$

Donc I est un idéal. ■

Caractérisation de l'ultrafiltre dans une algèbre de Boole

Théorème 2.2.2 Soit F un filtre propre dans B il y a équivalence entre :

1. F ultrafiltre.
2. $\forall x \in B, x \in F$ où $\bigwedge x \in F$.

Preuve. $(1 \implies 2)$

Soit $x \in B$, si $x \in F$ le problème est résolu

si $x \notin F$, posons $G = F \cup \{x\}$, où bien G partie \wedge -compatible $\implies F_G$ est propre $G \subset F_G$ et $F \subset F_G$ contradiction car F est un ultrafiltre.

Donc : G \wedge -incompatible i.e. : qu'il existe une suite $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ dans G ,

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$ avec $a_i \in G$. On pose $a_n = x$ (car les a_i ne peuvent pas tous appartenir à F) donc :

$$\begin{aligned}
a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge x &= 0 = a \wedge x \implies \bigwedge a \vee \bigwedge x = 1 \\
&\iff a \leq \bigwedge x \text{ or } a \in F, \bigwedge x \geq a \\
&\implies \bigwedge x \in F
\end{aligned}$$

$(2 \implies 1)$

Supposons que F n'est pas un ultrafiltre alors il existe un filtre propre F' qui contient F

$$\begin{aligned}
F \subset F' &\implies \exists x \in F' \text{ et } x \notin F \quad \blacksquare \\
&\implies \bigwedge x \in F \subset F' \\
&\implies \bigwedge x \wedge x = 0 \in F' \text{ (contradiction avec le fait que } F' \text{ filtre propre).}
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 On trouve le même théorème pour les idéaux maximaux.

En effet, si I est un idéal maximal $\lceil I = C I$.

Soit $x \in \lceil I \implies \lceil x \in I$

$\implies x \notin I$

$\implies x \in CI$.

Théorème 2.2.3 Soit U un ultrafiltre alors : $x \vee y \in U \iff x \in U$ où $y \in U$

Preuve. (\implies)

Soit $x \vee y \in U$ et supposons que $x \notin U$ et $y \notin U$ alors

$\lceil x \in U$ et $\lceil y \in U \implies \lceil x \wedge \lceil y \in U$ contradiction. Donc au moins l'un des deux

$\implies x \vee y \notin U$

éléments appartient à U .

(\Leftarrow)

$x \in U, y \in U : x \vee y \geq x \in U \implies x \vee y \in U$ ■

Théorème 2.2.4 I Idéal maximal $x \wedge y \in I \implies x \in I$ où $y \in I$ (C'est la notion de l'idéal premier).

Théorème 2.2.5 Tout filtre propre est égal à l'intersection des ultrafiltres que le contient.

Preuve. Soit F un filtre propre $U_F = \{ \text{Ultrafiltres } u / u \supset F \}$

(\subset)

$F = \bigcap_{u \in U_F} u$, $F \subset \bigcap_{u \in U_F} u$ évident.....(*)

(\supset)

Soit $x \in \bigcap_{u \in U_F} u$, on pose $G = F \cup \{ \lceil x \}$ où bien G est \wedge -compatible alors F_G est propre, donc $F \cup \{ \lceil x \} \subset u$ avec : $\lceil x \in u$ (contradiction car : $\lceil x \notin \bigcap_{u \in U_F} u$), donc la partie G est \wedge -incompatible,

elle contient une suite d'éléments a_1, a_2, \dots, a_n , $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$

i.e. : $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \wedge \lceil x = 0$ soit $a \wedge \lceil x = 0$ tel que

$$a \in F, a \wedge \lceil x = 0 \iff a \leq x$$

$$\implies x \in F$$

donc : $\cap_{u \in U_F} u \subset F \dots\dots\dots (**)$

de (*) et (**) donnent $F = \cap_{u \in U_F} u$. ■

Corollaire 2.2.1

$\{1\} = \cap \{ \text{tous les ultrafiltres} \}$.

$\{0\} = \cap \{ \text{tous les idéaux maximaux} \}$.

Théorème 2.2.6 Soit F une partie non vide de l'algèbre Booléenne B . Pour que F soit un ultrafiltre il faut et il suffit que vérifie :

1. $x \notin F \implies \neg x \in F$,
2. $x \wedge y \in F \iff x \in F \text{ et } y \in F$.

Preuve. (\implies)

Si F un ultrafiltre, il est clair qu'on a (1) et (2)

(\impliedby)

Si F vérifie (1) et (2). Montrons que F est un ultrafiltre.

1. $x \in F \text{ et } y \geq x \implies y \in F$?

On a : $x \in F \text{ et } y \geq x \implies x.y = x \in F \implies y \in F$.

2. $x \in F, y \in F \implies x.y \in F$.

Donc F est un filtre propre.

3. La condition (1) montre que F est maximal.

■

Théorème 2.2.7 Soit F une partie non vide de B pour que F soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique γ soit un morphisme Booléen de B dans $U = \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$.

$$\gamma : B \longrightarrow U : \gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F; \\ 0 & \text{si } x \notin F. \end{cases}$$

Preuve. F ultrafiltre $\implies \gamma$ est un morphisme Booléen

$\gamma(y) \setminus \gamma(x)$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\gamma(x)$	$\gamma(\lceil x)$
0	1
1	0

$$\gamma(x.y) = \gamma(x).\gamma(y) \quad \gamma(\lceil x) = \lceil \gamma(x).$$

Si γ est un morphisme Booléen $\implies F$ est un ultrafiltre?

$$1. \quad x \in F, \quad y \geq x \implies y \in F?.$$

$$\begin{aligned} \gamma(x) = 1, \quad \gamma(y) \geq \gamma(x) = 1 &\implies \gamma(y) = 1 \\ &\implies y \in F. \end{aligned}$$

$$2. \quad x \in F, \quad y \in F \implies x.y \in F?$$

$$\begin{aligned} \gamma(x) = \gamma(y) = 1 &\implies \gamma(x).\gamma(y) = \gamma(x.y) = 1 \\ &\implies x.y \in F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x \in F &\implies \gamma(x) = 1 \\ &\implies \gamma(\lceil x) = 0 \\ &\implies \lceil x \notin F \end{aligned}$$

Donc : F est maximal.

■

2.3 Théorème de représentation de stone

Tout Algèbre de Boole s'injecte dans une sous algèbre de la forme $P(X)$.

Preuve. On considère une algèbre de Boole B , X : l'ensemble des ultrafiltre de B ,

$$\begin{aligned} \gamma : \quad B &\longrightarrow P(X) \\ \gamma(x) &= \{U \in X \mid x \in U\} \end{aligned}$$

γ morphisme si :

$$1. \quad \gamma(x \vee y) = \gamma(x) \cup \gamma(y)$$

$$2. \quad \gamma(x \wedge y) = \gamma(x) \cap \gamma(y)$$

$$3. \quad \gamma(\sqcup x) = C\gamma(x)$$

On a :

$$\begin{aligned} \gamma(x \vee y) &= \{U \in X \mid x \vee y \in U\} \\ &= \{U \in X \mid x \in U \text{ où } y \in U\} \\ &= \gamma(x) \cup \gamma(y) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \gamma(x \wedge y) &= \{U \in X \mid x \wedge y \in U\} \\ &= \{U \in X \mid x \in U \text{ et } y \in U\} \\ &= \gamma(x) \cap \gamma(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\sqcap x) &= \{U \in X \mid \sqcap x \in U\} \\ &= \{U \in X \mid x \notin U\} \\ &= C\gamma(x) \end{aligned}$$

γ est injective :

$$\begin{aligned} x \in \ker \gamma &\iff \gamma(x) = \emptyset \\ &\iff x \notin U, \quad \forall U \in X \\ &\iff \sqcap x \in U, \quad \forall U \in X \\ &\iff \sqcap x \in \bigcap_{U \in X} U = \{1\} \\ &\iff \sqcap x = 1 \end{aligned}$$

donc γ est injective.

$$\gamma(\sqcap x) = C\gamma(x)?$$

$$\begin{aligned} U \in \gamma(\sqcap x) &\iff \sqcap x \in U \quad \blacksquare \\ &\iff x \notin U \\ &\iff U \notin \gamma(x) \\ &\iff U \in C\gamma(x) \\ &\iff \gamma(\sqcap x) = C\gamma(x) \end{aligned}$$

Si B est fini alors γ est surjective.

En effet, si B est finie tout filtre est principal $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a = a_1, a_2, \dots, a_n \in F$
 F est principal et engendre par a , $\gamma : B \longrightarrow P(x)$.

Soit $y \in P(X)$, $y \subset X$

Si $y = \emptyset = \gamma(0)$

Si $y = X = \gamma(1)$, $y = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$, $F = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$

F est principal, $F = B \vee a$.

$Y = \gamma(a)$?

(\implies)

Soit $U_i \in y \implies a \in U_i$

$\implies U_i \in \gamma(a)$

$\implies y \in \gamma(a)$

(\Longleftarrow)

Soit $v \in \gamma(a) \implies a \in v$,

$\implies F \subset v$

supposons que

$v \neq U_i, \forall i, i = 1 \dots k \implies U_i \not\subseteq_{\forall i=1, \dots, k} v \forall i, \exists X_i \setminus X_i \in U_i \text{ et } X_i \notin v.$

Soit $X = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_k \implies X \in U_i, \forall i = 1, \dots, k$

$\implies X \in F$

$\implies X \in v$

contradiction il existe donc un $i_0 \setminus v = U_{i_0}$, donc $v \in y$, $\gamma(a) \subset y$, $\gamma(a) = y$

B algèbre de Boole fini alors $B \simeq 2^n$.

2.3.1 Conséquences

1. Le nombre d'éléments d'un algèbre de Boole est de la forme 2^n (où n est le nombre d'ultrafiltres de B).
2. Toutes les algèbres de Boole ayant le même nombre d'élément 2^n , sont isomorphe entre eux et isomorphe à $P(X)$ où X est un ensemble à n éléments.
3. $\forall n$, il existe une algèbre de Boole ayant 2^n éléments et possédant n ultrafiltres.

Chapitre 3

Etude Topologique

Dans ce chapitre, nous allons mener une étude topologique des algèbres de Boole.

3.1 Etude Topologique

Soit X un espace topologique compact.

Lemme 3.1.1 *Il y a équivalence entre :*

- a. Pour tout $x \in X$ l'intersection des ofs contient x est $\{x\}$.*
- b. Si $x \neq y$ il existe un of V tel que : $x \in V$ et $y \notin V$.*
- c. La topologie de X est engendrée par les ofs.*

Preuve. $(a \implies b)$

Soit $x \neq y \implies y \notin \{x\} = \cap \{\text{of contient } x\}$ donc il existe un of V tel que $x \in V$ et $y \notin V$.

$(b \implies a)$

Il est clair que $\cap \{\text{ofs } V \text{ contient } x\} \supset \{x\}$. Montrons que $\cap \{\text{ofs } V \text{ contient } x\} \subset \{x\}$, soit $y \in \cap \{\text{ofs contient } x\}$, Si $y \neq x$. il existe un of V tel que : $x \in V$ et $y \notin V$ donc $y \notin \cap \{\text{ofs contient } x\}$ sauf si $y = x$ par suite $\cap \{\text{of contient } x\} = \{x\}$.

$(b \implies c)$

Soit Ω un ouvert non vide de X alors $\Omega = \cup \{\text{ofs } \subset \Omega\}$, soit $x \in \Omega$ pour chaque $y \subset C \Omega$, $y \neq x$, il existe un of V_y , $y \in V_y$ et $x \notin V_y$. $(x \notin V_y) \implies (x \in CV_y)$

$$\begin{aligned}
 C \Omega \subset \bigcup_{y \in C \Omega} V_y &\implies^{C \Omega \text{ est compact}} C \Omega \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n} \\
 \text{donc : } V &= C V_{y_1} \cap C V_{y_2} \cap \dots \cap C V_{y_n} \\
 x \in V &\implies x \in \Omega = \bigcup \{ofs \subset \Omega\} \\
 &\implies \bigcup \{ofs \subset \Omega\} = \Omega \\
 (c \implies b) \\
 X \text{ est séparé} &\implies^{x \neq y} \text{ il existe un ouvert } \Omega \text{ tel que : } x \in \Omega \text{ et } y \notin \Omega \\
 \Omega &= \bigcup \{of \subset \Omega\}, \quad x \in \Omega \implies \text{ il existe un of } V \text{ tel que : } x \in V \text{ et } y \notin V \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Définition 3.1.1 On appelle *espace Booléen*, tout espace topologique compact vérifiant l'une des 3 propriétés du lemme précédent.

1. Tout espace Booléen est un espace totalement discontinu (i.e. : La composant connexe de a , $C(a) = \{a\}$).
2. Pour qu'un espace discret soit Booléen il faut et il suffit qu'ils sont fini.

3.2 Espace dual d'un anneau Booléen

Soit B un anneau Booléen, X l'espace de Stone de B

$$\begin{aligned}
 \sigma : B &\longrightarrow P(X) \\
 \sigma(B) &= \{\sigma(\alpha)\}_{\alpha \in B}
 \end{aligned}$$

$\sigma(B)$ est un sous anneau de Boole B' de $P(X)$ on muni X de topologie engendré par B'

$$\emptyset = \sigma(0) = \{u \in X / 0 \in u\} = \emptyset$$

$$X = \sigma(1) = \{u \in X / 1 \in u\} = X$$

$$\Omega_1 = \bigcup_{i \in I} \sigma(\alpha_i)$$

$$\Omega_2 = \bigcup_{j \in J} \sigma(\alpha_j)$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \bigcup_{i,j} \sigma(\alpha_i \beta_j)$$

Théorème 3.2.1 Muni de cette topologie X est un espace Booléen.

Preuve.

1. X est séparé : $x \neq y \implies x \subsetneq y$ (Car x et y sont des ultrafiltres de B) il existe donc $\alpha \in B$ tel que : $\alpha \in x \implies x \in \sigma(\alpha)$ et

$$\begin{aligned} \alpha \notin y &\implies \neg \alpha \in y \\ &\implies y \in \sigma(\neg \alpha) \end{aligned}$$

Donc : $\sigma(\alpha)$ est un voisinage de x et : $\sigma(\neg \alpha)$ est un voisinage de y .

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) \cap \sigma(\neg \alpha) &= \sigma(\alpha \wedge \neg \alpha) \\ &= \sigma(0) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. Tous les $\sigma(\alpha)$ sont des ofs dans X , $\sigma(\alpha)$ est un ouvert par définition $\sigma(\alpha)$ est un fermé car : $C \sigma(\alpha) = \sigma(\neg \alpha)$. Donc : $\sigma(\alpha)$ est un ouvert fermé à la fois, donc c'est un of.

3. X est compact, supposons que $X = \cup_{i \in I} \sigma(\alpha_i)$ et $G = \{\neg \alpha_i\}_{i \in I} \subset B$ supposons que G est \wedge -compatible $\implies F_G$ est propre $\implies \exists x \in X$ tel que : $G \subset F_G \subset x$

il existe un i_0 tel que : $x \in \sigma(\alpha_{i_0}) \implies \alpha_{i_0} \in x$ et $\neg \alpha_i \notin x : \neg \alpha_i \wedge \alpha_{i_0} = 0 \notin x$ contradiction. Donc : G est \wedge -incompatible donc :

$$\begin{aligned} \neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2 \wedge \dots \wedge \neg \alpha_n &= 0 \implies \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n = 1 \\ &\implies \sigma(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n) = \cup_{i=1}^n \sigma(\alpha_i) \\ &= \sigma(1) \\ &= X \end{aligned}$$

X est donc compact.

■

3.2.1 Complément

1. Tout $\sigma(\alpha)$ est un of de X .
2. Soit V un of de X donc $V = \cup_{i \in I} \sigma(\alpha_i)$, (V est fermé dans X qui est compact, donc V est compact) \implies Il existe un recouvrement fini de V i.e. :

$$\begin{aligned} V &= \cup_{i=1}^n \sigma(\alpha_i) \\ &= \sigma(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n) \\ &= \sigma(\alpha) \end{aligned}$$

Donc : $V = \sigma(\alpha)$

Définition 3.2.1 X est un espace Booléen dual de B , notation : $X = B^0$.

3.3 Anneau Booléen dual d'un espace Booléen

On pose $B = \{\text{ofs de } X\}$ c'est un sous anneau de Boole de $P(X)$ c'est par définition l'anneau Booléen dual de X . Notion $B = X^*$

Lemme 3.3.1 L'ensemble des θ_x des ofs qui contient $x \in X$ est un ultrafiltre.

Preuve.

$$1. \quad \begin{aligned} \forall V \in \theta_x, \quad w \supset V &\implies x \in w \\ &\implies w \in \theta_x \end{aligned}$$

$$2. \quad v, w \in \theta_x \implies v \cap w \in \theta_x$$

$\emptyset \notin \theta_x$ donc : θ_x est un propre.

■

Conclusion

θ_x est un filtre propre. Soit $V \in \theta_x$. V est un of qui contient x ,

$$\begin{aligned} x \in V &\implies x \notin CV \\ &\implies CV \notin \theta_x \end{aligned}$$

Donc : θ_x est un ultrafiltre.

$$\begin{array}{ccccccc} B \text{ (anneau Booléen)} & \longrightarrow & B^\circ \text{ (espace dual)} & \longrightarrow & B^{\circ*} \text{ (anneau Booléen)} & \stackrel{?}{=} & B \\ X & \longrightarrow & X^* & \longrightarrow & X^{\circ*} & \stackrel{?}{=} & X \end{array}$$

$$\theta : X \longrightarrow X^*$$

Preuve.

$$x \longrightarrow \theta_x = \{\text{ofs qui contient } x\}$$

On montre que θ bijective et morphisme (isomorphisme)

1. θ_x est injective :

$$\begin{aligned} x \neq y &\implies \exists \text{ of } V \text{ tel que : } x \in V \text{ et } y \notin V \\ &\implies \theta(x) \neq \theta(y). \end{aligned}$$

2. θ_x est surjective :

Soit U un ultrafiltre de $B = X^*$. On pose : $A = \bigcap_{v \in U} V$ (A n'est pas vide)

$$A \neq \emptyset \implies \exists x \in A : U = \theta(x)?$$

$$(\theta_x \subset U)$$

Soit $v \in \theta(x) \implies v \in U$?

V of tel que $x \in V$

Si $v \notin U \implies CV \in U$

$\implies x \in CV$ contradiction donc : $V \in U$

$U \supset \theta_x$ évidente

$$(U \subset \theta_x)$$

$V \in U \implies V$ est un of contient A et $x \in A$

$$\implies x \in V$$

$$\implies V \in \theta_x$$

$$\implies U \subset \theta_x$$

donc : $U = \theta_x$

donc : θ est bijective

3. θ est continue :

Soit V' un of de X^* alors : $V' = \sigma_B(V)$ où V est un of de X

$$x \in \theta^{-1}(V') \iff \theta(x) \in V'$$

$$\iff \theta_x \in \sigma_B(V)$$

$$\iff V \in \theta_x$$

$$\iff x \in V$$

Donc : $\theta^{-1}(V') = V$.

■

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons essayé de donner un aperçu sur les différentes propriétés des algèbres de Boole.

On a commence par l'introduction des treillis distributifs, treillis complémenté et treillis de Boole. En fin une étude détaillée sur les algèbres de Boole.

En fin après quelques généralités sur les espaces topologiques on a terminé ce par une représentation topologique des algèbres de Boole.

On a étudié également les propriétés des filtres et des idéaux dans un treillis distributif ainsi que dans une algèbre de Boole.

Bibliographie

- [1] Axler, S., Ribet, K.A. *Introduction to Boolean Algebras*, Springer Science (2009)..
- [2] Axler, S. et AL (2005). *A FIELD GUIDE TO ALGEBRA*, Springer Science+Business Media, Inc.
- [3] AYRES FRANK, Jr., LLOYD R.J. (2004-1965). *Theory and Problems of ABSTRACT ALGEBRA*, McGraw-Hill Companies, Inc.
- [4] Bilanniuk, S. (1994-1999). *A Problem Course in Mathematical Logic vol I Propositional and First-Order Logic*, Stefan Bilaniuk.
- [5] Coré, R. et Daniel, L. (2000). *Mathematical Logic A Course with Exercises Part I : Propositional calculus, Boolean algebras, Predicate calculus, Completeness theorems*, This English Edition Oxford University Press.
- [6] J. Donald Monk, R BONNET *HANDBOOK OF BOOLEAN ALGEBRAS VOL 1*, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V. 1989.
- [7] J. Donald Monk, R BONNET (1989). *HANDBOOK OF BOOLEAN ALGEBRAS VOL 2*, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V. 1989.
- [8] J. Donald Monk, R BONNET (1989). *HANDBOOK OF BOOLEAN ALGEBRAS VOL 3*, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V. 1989.
- [9] A. W. HAGER *Algebra Universalis*. 39 (1998), 57-70.
- [10] KATHLEEN, L., HILBERT, L. *LOGIC AND BOOLEAN ALGEBRA*, Barron's Educational Series, Inc, 1979.

- [11] E. Mendelson. *THEORY AND PROBLEMS OF BOOLEAN ALGEBRA and SWITCHING CIRCUITS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES.1989.
- [12] R. Padmanabhan et S. Rudeanu *Axioms for Lattices and Boolean Algebras*, World Scientific 2008.
- [13] Steven, R. *Lattices and Ordered Sets*, Steven Roman Springer, 2008.
- [14] Steven R. (1969). *Boolean Algebras*, Springer-Verlag Berlin, 2008.